Podstawy Fizyki

Seria 1

21 lutego 2023

Zadanie 1. Korzystając z definicji iloczynu skalarnego, znajdź cosinus kąta i kąt między wektorami $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Następnie wyznacz kąt między wektorami $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$, gdzie $\vec{a} = 4\vec{u} - \vec{v}$ oraz $\vec{b} = \vec{v} + \frac{3}{2}\vec{u}$.

Zadanie 2. Dane są trzy wektory: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ile wynosi sinus kąta i kąt między wektorami $\vec{a} + \vec{c}$ oraz $3\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{a}$?

Zadanie 3. Równania ruchu dwóch punktów obserwowanych z pewnego układu odniesienia U wyglądają następująco:

$$\vec{r}_1^U(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 \qquad \text{oraz} \qquad \vec{r}_2^U(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

(a) Znajdź wektory prędkości i przyspieszenia obu punktów w układzie odniesiania U, tj.: $\vec{V}_1^U$, $\vec{V}_2^U$, $\vec{a}_1^U$ oraz $\vec{a}_2^U$.

(b) Wyznacz wektory tych wielkości w układzie odniesienia związnym z punktem 1: $\vec{V}_1^1$, $\vec{V}_2^1$, $\vec{a}_1^1$, $\vec{a}_2^1$.

(c) Wyznacz wektory tych wielkości w układzie odniesienia związnym z punktem 2: $\vec{V}_1^2$, $\vec{V}_2^2$, $\vec{a}_1^2$, $\vec{a}_2^2$.

(d) Które układy odniesienia są inercjalne, a które nieinercjalne? Jak zachowuje się przespieszeniu przy przechodzeniu między nimi?

Zadanie 4. Pewien obiekt w układzie odniesienia U' ma wektor prędkości równy $\vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Układ U' porusza się ze stałą prędkością względem spoczywającego układu U równą $\vec{v}_{U'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(a) Jak wygląda wektor prędkości obiektu w układzie U?

(b) Zakładając, że obiekt rozpoczął swój ruch w chwili czasu $t = 0\,\mathrm{s}$, ze środka układu współrzędnych U', oraz, że środek układu U' w tej chwili czasu był przesunięty względem środka układu U o wektor $\vec{R} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ m, znajdź położenie obiektu po 300 s ruchu w obu układach współrzędnych.

(c) Ile będzie wynosiła odległość między środkami układów po tym czasie?

Zadanie 5. Z portu A w tym samym momencie wypływają dwa statki B i C. Statek B kieruje się na północ z prędkością v_B = 40 km/h a statek C kieruje się z prędkością v_C = 50 km/h na wschód, α = 30° od kierunku północnego.

(a) Znajdź wektor prędkości statku B względem statku C.

(b) Podaj zależność od czasu odległości między statkami.

(c) Po jakim czasie statki będą od siebie oddalone o s = 500 km?

Zadanie 6. Koszykarz w ramach treningu wykonuje rzuty do kosza, oddalonego od niego o $x_0 = 5\,\mathrm{m}$. Kosz znajduje się na wysokości $h = 3\,\mathrm{m}$ względem płyty boiska. W pewnej chwili, jeden z jego kolegów uruchomił mechanizm, dzięki któremu kosz zaczął oddalać się od koszykarza ze stałą prędkością $\vec{v}_\mathrm{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Wiedząc, że w momencie rozpoczęcia ruchu kosza koszykarz wykonuje rzut piłką znajdującą się na wysokości $H = 2\,\mathrm{m}$ względem płyty boiska oraz wektor prędkości początkowej piłki skierowany jest pod kątem $\alpha = 30°$ do poziomu, wyznacz prędkość początkową, z jaką koszykarz powinien wykonać rzut, aby trafić do poruszającego się kosza.

Zadanie 7. Ze śmigłowca lecącego na wysokości $H = 15\,\mathrm{m}$, ze stałą prędkością $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ wyrzucono paczkę. Prędkość początkowa paczki względem śmigłowca wynosiła $\vec{v}_\mathrm{p}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i była skierowana przeciwnie do kierunku lotu śmigłowca.

(a) Ile wynosi prędkość początkowa paczki względem ziemi, $\vec{v}_\mathrm{p}$?

(b) Oblicz odległość między miejscem upadku paczki a miejscem nad którym została wyrzucona ze śmigłowca.

(c) Jaki kąt tworzy wektor prędkości paczki tuż przed jej zderzeniem z podłożem, względem układu odniesienia związanego z ziemią?

Zadanie 8. Pewne ciało porusza się po linii prostej. Prędkość tego ciała można opisać następującą zależnością:
$v(t) = at^2 + bt + c$.
Uczniowie dokonali pomiaru trzech różnych prędkości dla trzech różnych czasów, które wynosiły kolejno: $v(2\,\mathrm{s}) = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v(4\,\mathrm{s}) = 9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i $v(10\,\mathrm{s}) = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(a) Znajdź analityczną postać $v(t)$.

(b) Ile wynosi prędkość początkowa ciała?

(c) Ile wynosi maksymalna wartość prędkości ciała oraz czas w którym ją osiągnęło?

(d) Jaką drogę przebyło ciało w ciągu drugiej i trzeciej sekundy?

Zadanie 9. Z pewnego punktu na ziemi wystrzelono pocisk z prędkością początkową $\vec{v}_0$ skierowaną pod kątem θ do poziomu. Znajdź kąt θ, dla którego odległość na jaką poleci pocisk będzie największa.

Zadanie 10. W środku tarczy o promieniu R znajduję się pająk. Tarcza obraca się ze stałą prędkością ω względem osi przechodzącej przez jej środek. W pewnej chwili pająk zaczyna poruszać się ze stałą prędkością v_0 wzdłuż wybranego przez siebie promienia.

(a) Znajdź równania ruchu i tor pająka w nieruchomym układzie odniesienie we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych.

(b) Znajdź zależność od czasu prędkości pająka oraz podaj jego składowe transwersalną i radialną.

(c) Znajdź zależność przyspieszenia pająka oraz podaj ich składowe: radialną, transwersalną, normalną i styczną.

(d) Podaj jak zmienia się w czasie promień krzywizny.