Podstawy Fizyki

Zadania domowe 1

Zadanie 1. Mamy podane następujące wektory: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ oraz $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Czy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oraz $\vec{b}$, i $\vec{c}$ są względem siebie prostopadłe? **Odp.:** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nie są; $\vec{b}$ i $\vec{c}$ także nie są.

(b) Ile wynosi iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$, gdzie $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b}$ oraz $\vec{v} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + 2\vec{a}$. **Odp.:** 33.5.

(c) Ile wynosi kąt między wektorem $\vec{a}$ a wektorem powstałym w wyniku iloczynu wektorowego $\vec{v} \times \vec{u}$? **Odp.:** 86°.

Zadanie 2. W układzie kartezjańskim mamy trzy wektory: $\vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ \lambda \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{C} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 + \frac{\lambda}{6} \end{bmatrix}$. Dla jakich wartości parametru λ wektory te leżą w jednej płaszczyźnie? **Odp.:** $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -18$.

Zadanie 3. Ruch pewnego ciała w spoczywającym układzie odniesienia U można opisać następującym równaniem: $\vec{r}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$. Względem tego samego układu odniesienia porusza się inne ciało, którego równanie ruchu wygląda następująco: $\vec{r}_2(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} t$.

(a) Jak wygląda wektor położenia pierwszego ciała w układzie odniesienia ciała drugiego? **Odp.:** $(-3 + 6t)\vec{i} + (3 - 2t)\vec{j} + (1 + t)\vec{k}$.

(b) Zakładając, że oba ciała rozpoczęły swój ruch w chwili czasu $t = 0$ s, podaj ich wektor położenia po czasie 200 s względem układu U. **Odp.:** $\vec{r}_1(t = 200) = \begin{bmatrix} 400 \\ 1 \\ 201 \end{bmatrix}$ m oraz $\vec{r}_2(t = 200) = \begin{bmatrix} -797 \\ 398 \\ 0 \end{bmatrix}$ m.

(c) Jak zmienia się w czasie odległość między poruszającymi się ciałami? Jaką będzie ona miała wartość po czasie 200 s? **Odp.:** $\Delta(t) = \sqrt{41t^2 - 46t + 19}$, $\Delta(t = 200) \approx 1277$ m.

Zadanie 4. Z helikoptera lecącego z prędkością $\vec{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ względem ziemi wyrzucono przesyłkę z prędkością $\vec{u} = \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ względem helikoptera. Wiedząc, że w momencie wyrzucania przesyłki helikopter znajdował się na wysokości H, znajdź:

(a) Równania ruchu przesyłki względem ziemi. **Odp.:** $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ H \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v - u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} t^2$

(b) W jakiej odległości od miejsca zrzutu upadnie przesyłka? **Odp.:** $x_0 = (v - u)\sqrt{\frac{2H}{g}}$

(c) Po czasie Δt pilot zawrócił (helikopter porusza się z tą samą prędkość ale przeciwnie skierowaną), gdyż zapomniał wyrzucić jeszcze jednej przesyłki. Przyjmując, że wyrzuci ją w miejscu oddalonym o d od punktu zrzutu pierwszej przesyłki, jaką powinien jej nadać prędkość, aby druga przesyłka trafiła dokładnie w to samo miejsce co pierwsza? **Odp.:** $u' = \frac{d}{\sqrt{\frac{2H}{g}}} - u$

Zadanie 5. Ruch pewnego punktu w układzie kartezjańskim można opisać następującymi równaniami:

$x(t) = x_0 t \cos(\omega t)$,

$y(t) = y_0 t \sin(\omega t)$,

gdzie x_0 i y_0 są dodatnimi stałymi.

(a) Znajdź równania ruchu w biegunowym układzie współrzędnych. **Odp.:** $r(t) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}t$, $\phi(t) = \omega t$.

(b) Równanie toru ruchu. **Odp.:** $r(\phi) = \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\omega}\phi$.

(c) Wartość wektora prędkości ruchu w układzie biegunowym. **Odp.:** $v = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$.

(d) Wartość wektora przyspieszenia w układzie biegunowym. **Odp.:** $a = \omega\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sqrt{4 + \omega^2 t^2}$.